

**Physique  
Générale :  
Mécanique**

**11.02: Statique et  
dynamique du solide**

**Sections  
SC, GC & SIE , BA1**

**Dr. J.-P. Hogge**

**Swiss Plasma Center**

**École polytechnique  
fédérale de  
Lausanne**

Version du 28.8.2023

- Dynamique du solide: équilibre statique.
  - Exemple: Pont à treillis
- Cas particulier : solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ .
  - Moment cinétique par rapport à l'axe  $\Delta$
  - Moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$
  - Energie cinétique de rotation
  - Théorème du moment cinétique
  - Moment des forces par rapport à l'axe  $\Delta$ .
- Exemples de calcul de moment d'inertie par rapport à un axe
- Règle de Huygens-Steiner
- Analogies entre mouvement translationnel et rotationnel
- Exemple: pendule physique
- Exemple: cylindre sur plan incliné
  
- Annexe: Moment cinétique d'un solide: cas général
  - Tenseur d'inertie
  - Energie cinétique

- Comme un solide indéformable est un cas particulier de système de points matériels, les lois de la dynamique :

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G + \vec{M}_A^{\text{ext}}$$

... le théorème de transfert:

$$\vec{L}_A = \vec{L}_O + \overrightarrow{AO} \wedge M\vec{v}_G$$

... et les théorèmes de Koenig I et II

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_G^*$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + E_{\text{cin}}^*$$

**sont toujours valables!**

- Un système de points matériels (et en particulier un solide) est à l'équilibre statique si

$$\begin{cases} \vec{r}_\alpha = \text{cst} \\ \vec{v}_\alpha = 0 \end{cases} \quad \forall \alpha \in \text{système}$$

- On en tire que la quantité de mouvement et le moment cinétique sont nuls

$$\begin{cases} \vec{p} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = 0 \\ \vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = 0 \end{cases} \quad \forall O \in \text{référentiel}$$

- et on établit les **Conditions d'équilibre**

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \\ \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \end{cases} \quad \forall O \in \text{référentiel}$$

# Exemple de statique: pont à treillis

## Voir 11.03

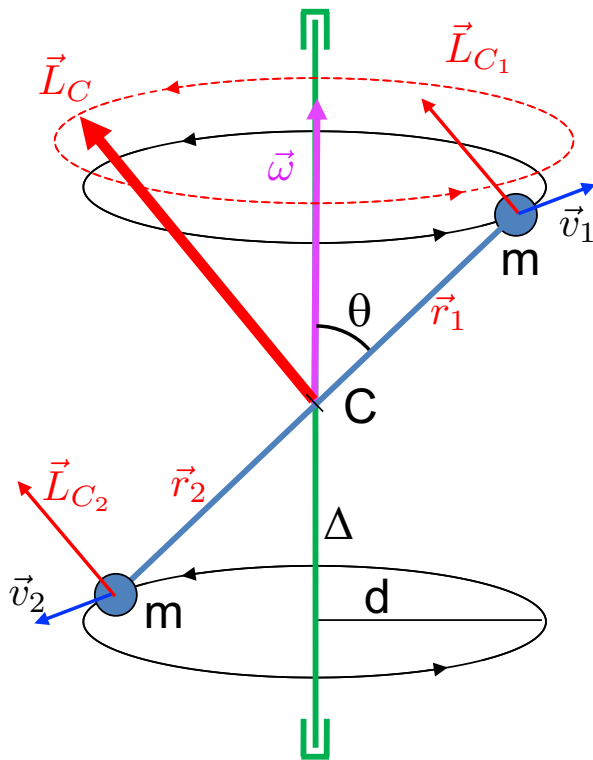
# Dynamique du solide:

## Cas particulier d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

# Corps solide en rotation autour d'un axe fixe.

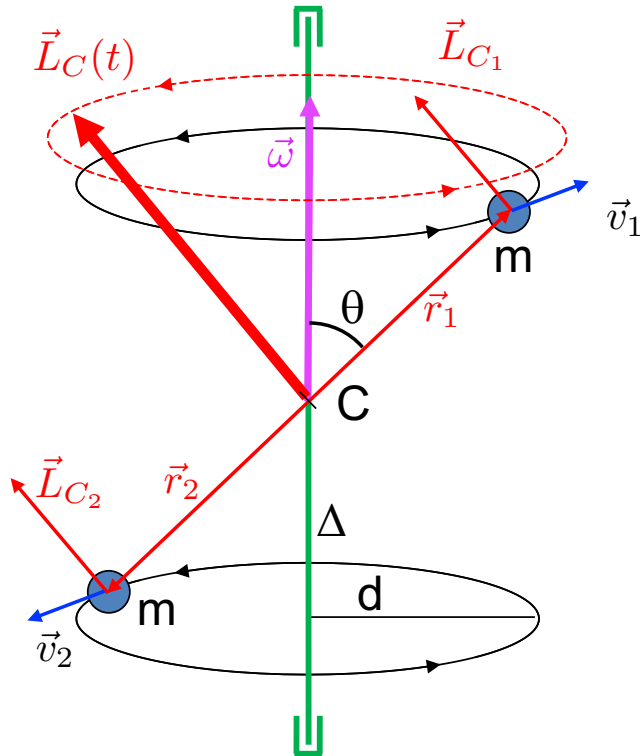
## Direction du moment cinétique

- On considère un solide simple, formé de deux points matériels de masse  $m$ , liés rigidement par une tige de masse nulle, et d'un axe  $\Delta$  (noté en vert) lui aussi de masse nulle, maintenu en place à ses extrémités. Le vecteur reliant les deux masses fait un angle  $\theta$  avec  $\Delta$ .

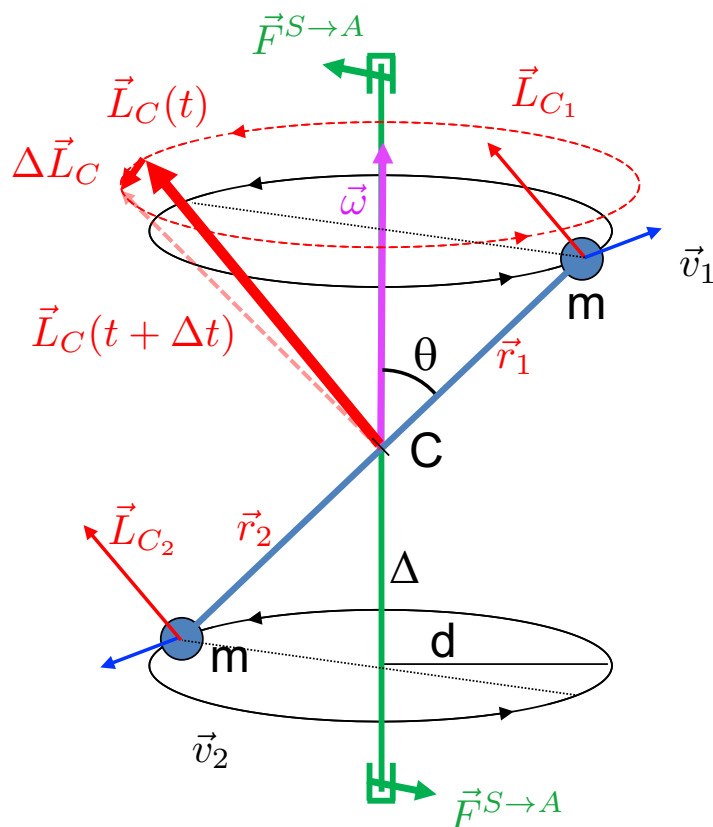


- Cet exemple illustre le fait que le moment cinétique n'est en général pas parallèle à l'axe de rotation, sauf si celui-ci est sur un axe de symétrie du solide. Cela se traduit par l'apparition de moments exercés par le support de l'axe et vice-versa.

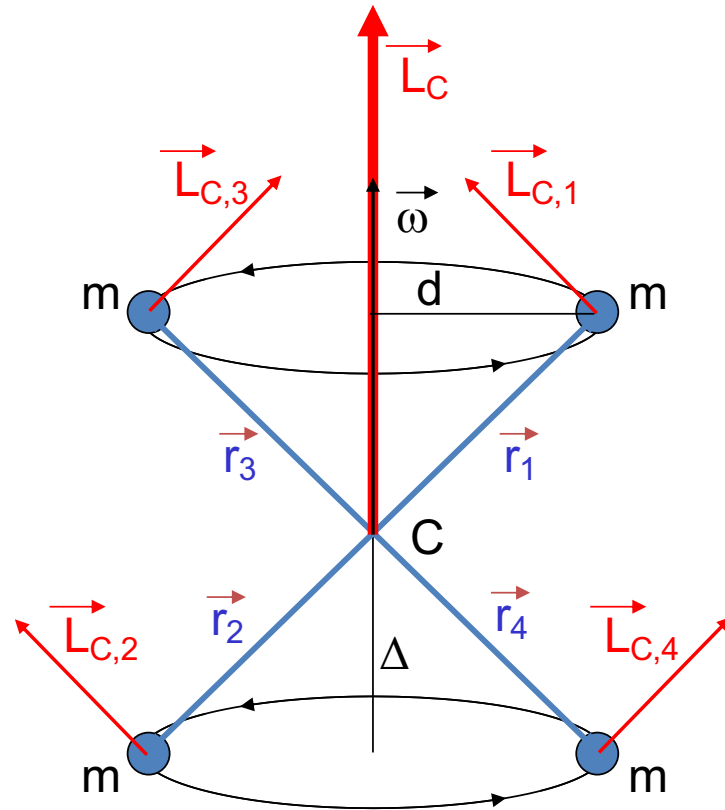
- Quelle est la direction des forces exercées par le support sur l'axe ?



- Quelle est la direction des forces exercées par le support sur l'axe ?

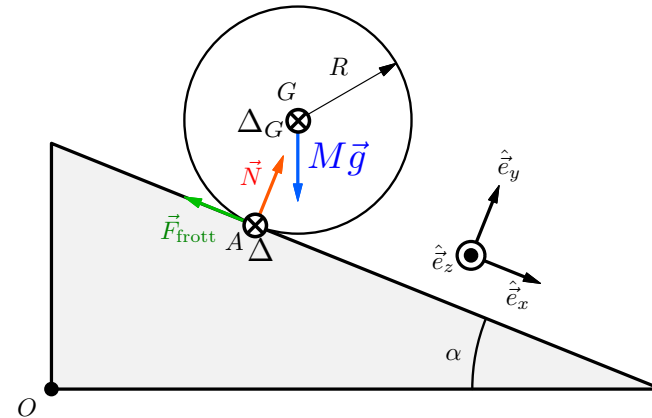
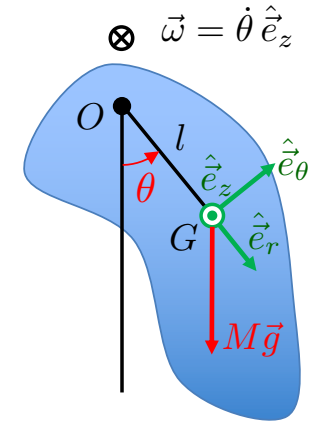
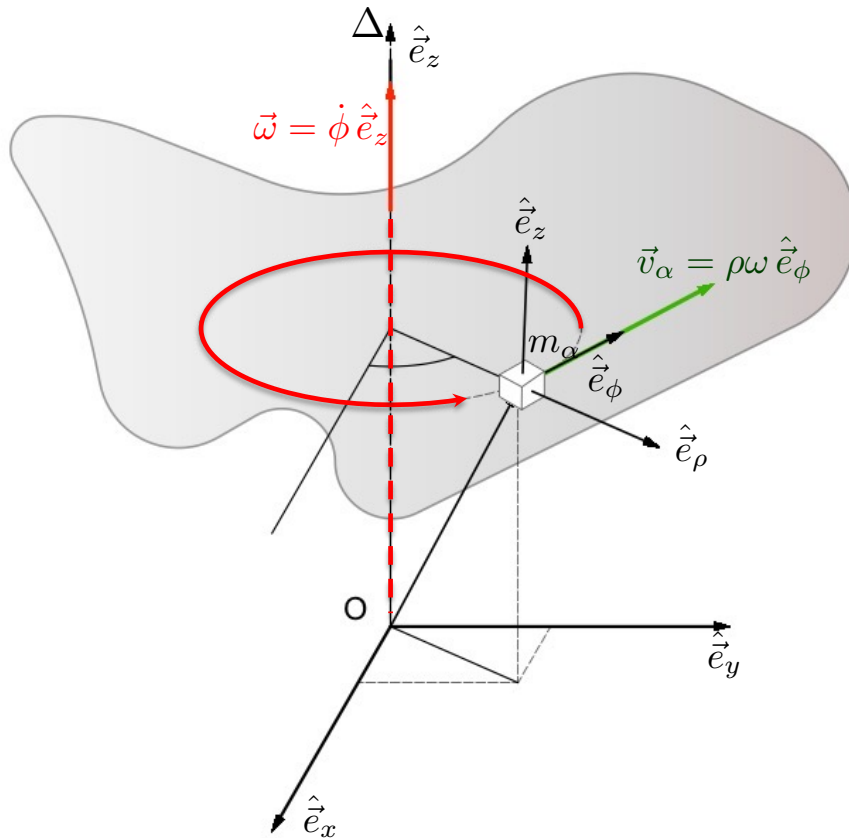


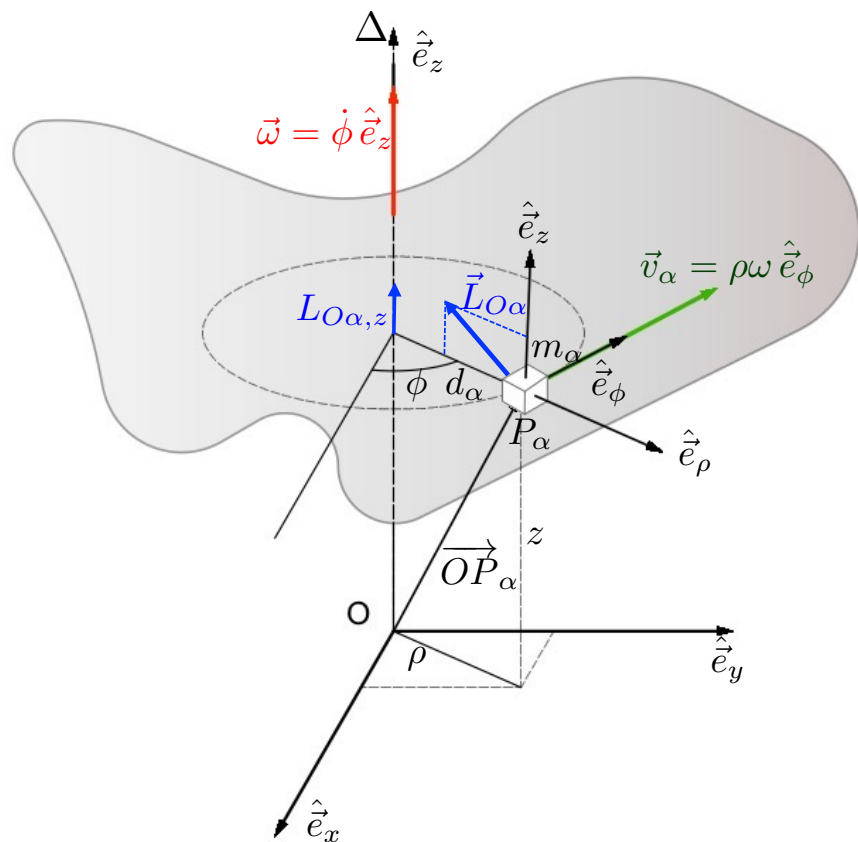
- Le système que nous considérons est :
  - 2 masses + tige + axe
- Entre l'instant  $t$  et l'instant  $t + \Delta t$  le moment cinétique par rapport à  $C$  varie de  $\Delta \vec{L}_C$
- Le moment des forces externes doit être parallèle à  $\Delta \vec{L}_C$ . Elles sont donc dans le plan formé par la tige et l'axe.
- Les forces 'tournent' avec l'axe
- Application: équilibrage des roues de voitures.



- Si le système est symétrique par rapport à l'axe de rotation, alors le moment cinétique est parallèle à l'axe.

## Axe fixe: direction fixe par rapport au référentiel d'inertie





On considère un solide tournant autour d'un axe de rotation fixe\*, noté  $\Delta$ , avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ . On place l'origine du référentiel sur l'axe de rotation et on aligne  $\hat{e}_z$  avec  $\Delta$ .

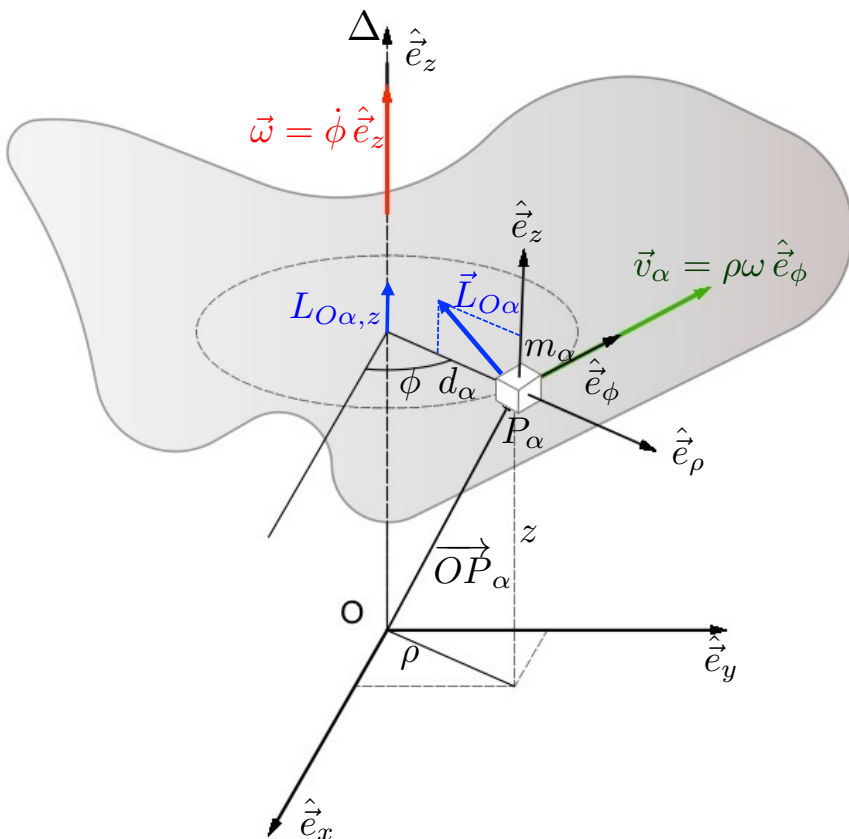
Le mouvement de chaque point  $P_\alpha$  de masse  $m_\alpha$  du solide est circulaire, dans un plan perpendiculaire à  $\vec{\omega}$  :

$$\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}_\alpha = \omega \hat{e}_z \times (d_\alpha \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z)$$

$$\vec{v}_\alpha = d_\alpha \omega \hat{e}_\phi$$

$d_\alpha$  : distance entre  $m_\alpha$  et  $\Delta$

\* on considère que les supports de l'axe exercent les forces nécessaires pour maintenir celui-ci en place au cas où le solide n'est pas symétrique.



Le moment cinétique du point matériel  $P_\alpha$  par rapport au point O est donc:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{O_\alpha} &= \overrightarrow{OP}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha \\ &= (d_\alpha \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z) \times m_\alpha d_\alpha \omega \hat{e}_\phi \\ &= m_\alpha d_\alpha^2 \omega \hat{e}_z - m_\alpha d_\alpha z \omega \hat{e}_\rho\end{aligned}$$

La composante en z du moment cinétique total est alors:

$$L_{O_z} = \vec{L}_O \cdot \hat{e}_z = \left( \sum_\alpha m_\alpha d_\alpha^2 \right) \omega = I_\Delta \omega$$

**Quel que soit le point O appartenant à l'axe, la composante en z du moment cinétique total est identique.**

Définition: **Moment cinétique par rapport à un axe  $\Delta$**

$$L_{\Delta} = \vec{L}_O \cdot \hat{e}_z = \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \right) \omega \quad [\text{kg m}^2/\text{s}]$$

Définition: **Moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$**

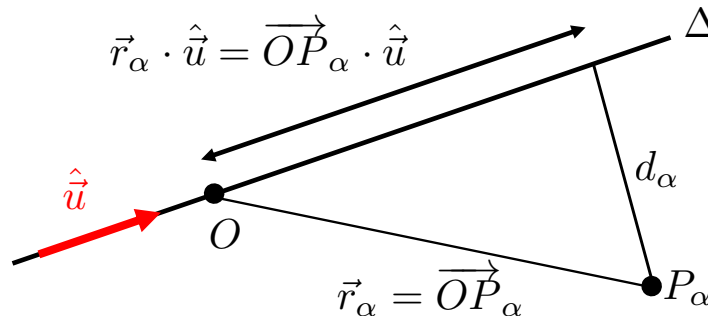
$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \quad [\text{kg m}^2]$$

Si  $\hat{u} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$  est un vecteur unitaire parallèle à l'axe de rotation, alors

$$d_{\alpha}^2 = \overrightarrow{OP}_{\alpha}^2 - \left( \overrightarrow{OP}_{\alpha} \cdot \hat{u} \right)^2$$

ou encore

$$d_{\alpha}^2 = \vec{r}_{\alpha}^2 - \left( \vec{r}_{\alpha} \cdot \hat{u} \right)^2$$



- Le passage au cas continu se fait en remplaçant la sommation sur l'indice  $\alpha$  par une intégrale sur le volume du solide:

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \quad \longrightarrow$$

$$I_{\Delta} = \int_V dm \left( \vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \hat{u})^2 \right) = \int_V \rho(\vec{r}) \left( \vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \hat{u})^2 \right) dV$$

Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe  $\Delta$

- Le moment d'inertie est une grandeur purement géométrique, qui dépend de la répartition de la masse du solide par rapport à l'axe considéré.
- Il caractérise la capacité du solide à s'opposer à une rotation.
- C'est une grandeur extensive.

- Avec les définitions précédentes, la relation entre le moment cinétique par rapport à un axe  $\Delta$  et le moment d'inertie  $I_\Delta$  est donc:

$$L_\Delta = I_\Delta \omega$$

Moment cinétique par rapport à un axe  $\Delta$

- L'énergie cinétique de rotation correspond à la somme des énergies cinétiques de chaque point matériel:

$$E_{\text{cin,rot}} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \underbrace{=}_{v_{\alpha} = d_{\alpha} \omega} \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$$

$$E_{\text{cin,rot}} = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$$

Energie cinétique de rotation

**Théorème:**

Pour un solide mobile en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixé, de direction  $\hat{u}$  et passant par un point O, l'équation d'évolution est:

$$I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u}$$

Comme le point O est fixe on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} &\implies \frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \hat{u} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u} \quad \underbrace{\implies}_{\frac{d\hat{u}}{dt}=0} \frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{u})}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u} \\ &\implies I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \hat{u} \end{aligned}$$

En revenant à une description en coordonnées cylindriques avec  $\hat{u} \equiv \hat{e}_z$  le moment des forces externes au point  $P_\alpha$  par rapport au point O est:

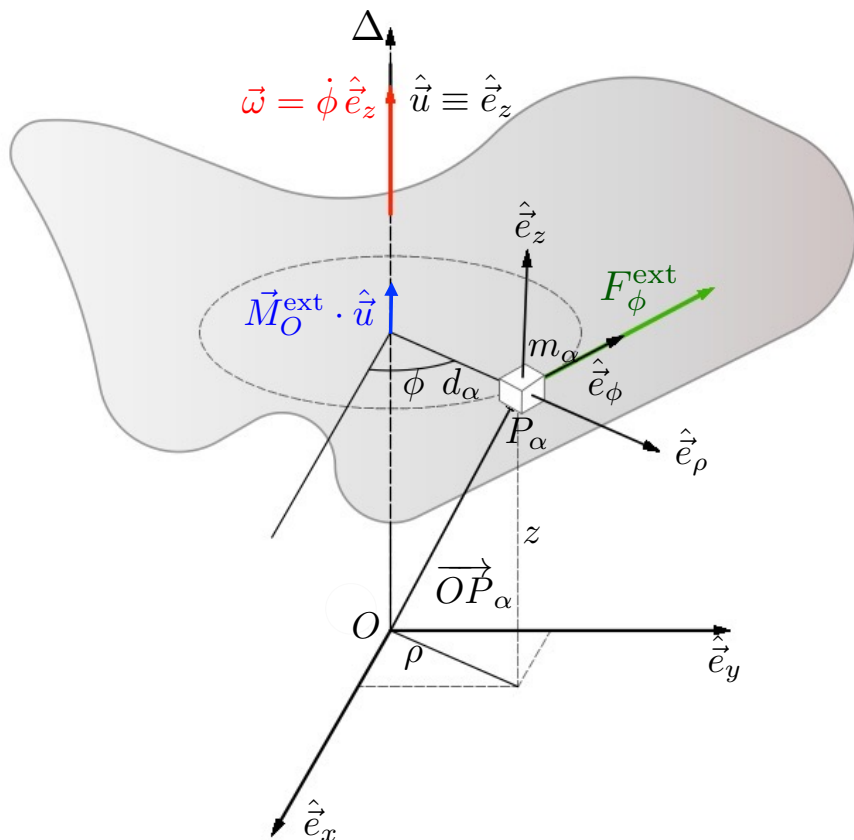
$$\vec{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} = \overrightarrow{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$$

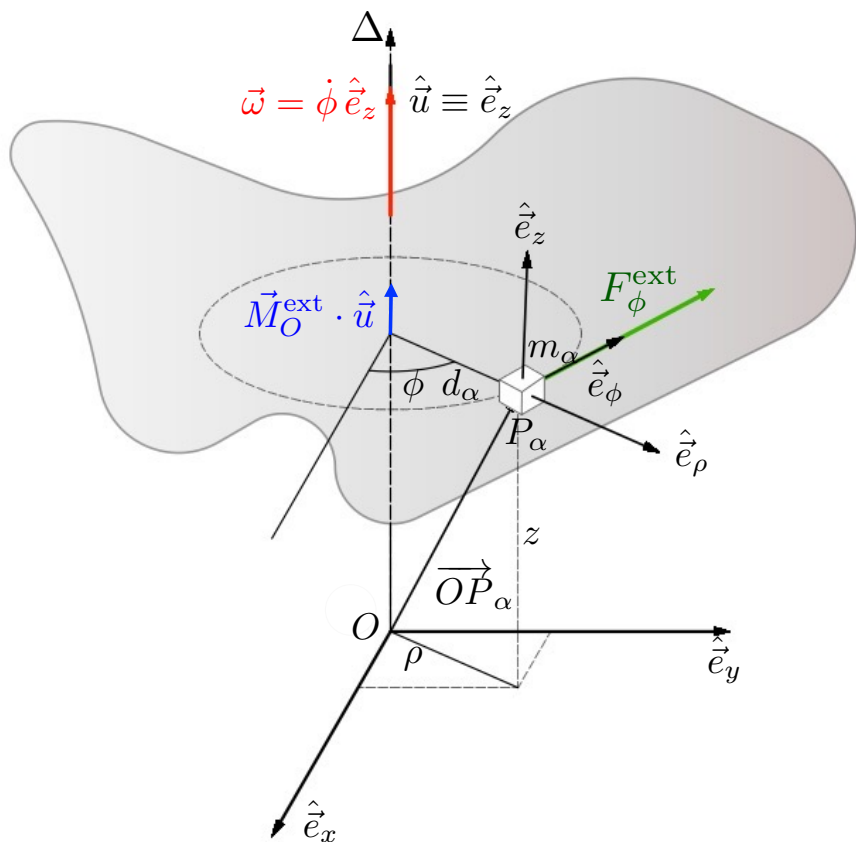
On développe:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} &= \left( d_\alpha \hat{e}_\rho + z_\alpha \hat{e}_z \right) \wedge \left( F_{\rho,\alpha}^{\text{ext}} \hat{e}_\rho + F_{\phi,\alpha}^{\text{ext}} \hat{e}_\phi + F_{z,\alpha}^{\text{ext}} \hat{e}_z \right) \\ &= d_\alpha F_{\phi,\alpha}^{\text{ext}} \hat{e}_z - d_\alpha F_{z,\alpha}^{\text{ext}} \hat{e}_\phi + z F_{\rho,\alpha}^{\text{ext}} \hat{e}_\phi - z F_{\phi,\alpha}^{\text{ext}} \hat{e}_\rho \end{aligned}$$

d'où la composante en z est:  $\vec{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} \cdot \hat{e}_z = d_\alpha F_{\phi,\alpha}^{\text{ext}}$

La composante en z du moment dépend uniquement de la composante azimuthale des forces externes et de la distance entre le point d'application et l'axe.





Le terme

$$\vec{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} \cdot \hat{u} = d_\alpha F_{\phi,\alpha}^{\text{ext}}$$

ne dépend pas de O. Comme précédemment, on définit le **moment des forces externes par rapport à l'axe Δ**

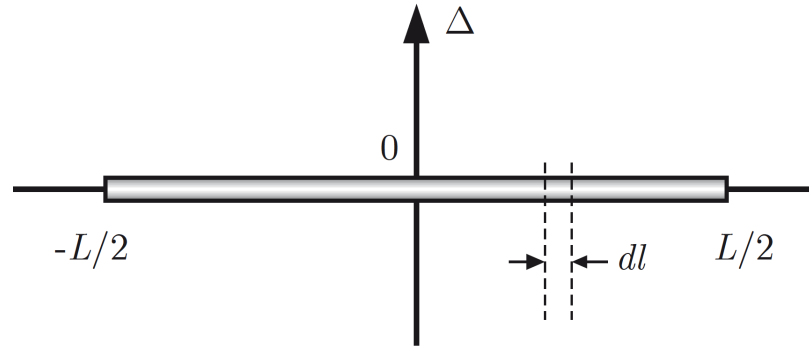
$$M_{\Delta}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} d_{\alpha} F_{\phi,\alpha}^{\text{ext}}$$

**Moment des forces externes par rapport à l'axe Δ**

Le théorème du moment cinétique s'écrit alors:

$$I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta}^{\text{ext}}$$

**Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.**



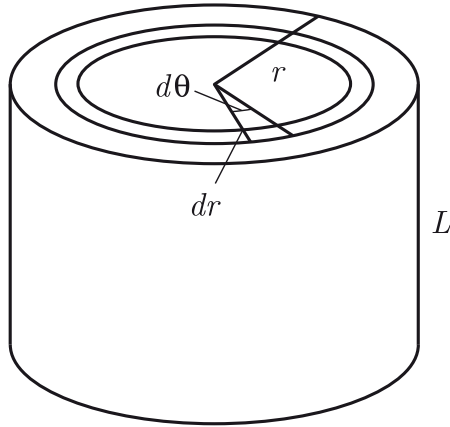
Hypothèse:  
 $L \gg \text{section}$

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

$$I_{\Delta} = \int_V r^2 \rho_v dV$$

$$\begin{aligned} \rho_v &: \text{densité volumique} &= \frac{M}{V} & \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \\ \rho_l &: \text{densité linéique} &= \frac{M}{L} & \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right] \end{aligned}$$

$$I_{\Delta} = \int_{-L/2}^{L/2} (\rho_l dl) l^2 = \rho_l \left[ \frac{\ell^3}{3} \right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{\rho_l L^3}{12} = \frac{ML^2}{12}$$



$$I_{\Delta} = \int_V r^2 \rho_v dV$$

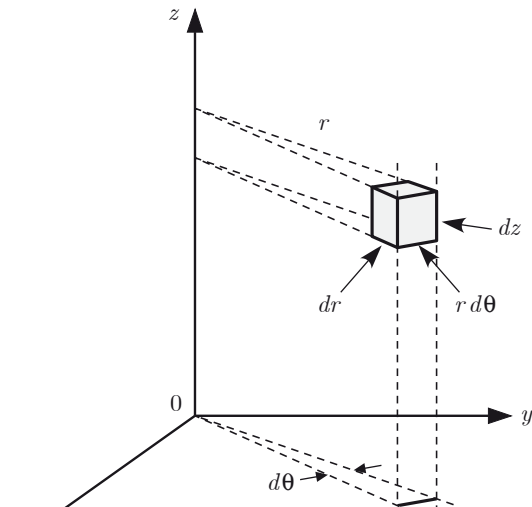
$$dV = r d\theta dr dz$$

Densité volumique :  $\rho_v = \frac{M}{\pi R^2 L}$

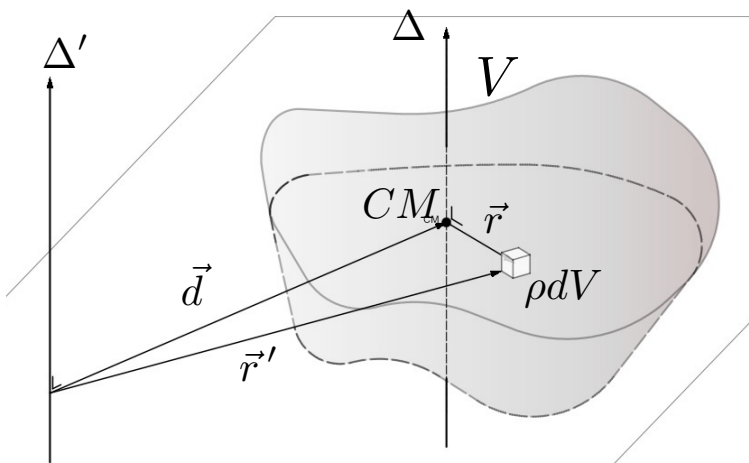
$$I_{\Delta} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho_v r^3 d\theta dr dz$$

$$= \int_0^R \rho_v L 2\pi r^3 dr = \frac{1}{2} \rho_v \pi L R^4$$

$$I_{\Delta} = \frac{1}{2} M R^2$$



- On admet que l'axe  $\Delta$  contient le centre de masse du solide.  
On veut connaître le moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta'$  parallèle à  $\Delta$ .



$$I_{\Delta} = \int_V r^2 \rho dV$$

$$I_{\Delta'} = \int_V r'^2 \rho dV$$

$$= \int_V (\vec{d} + \vec{r})^2 \rho dV$$

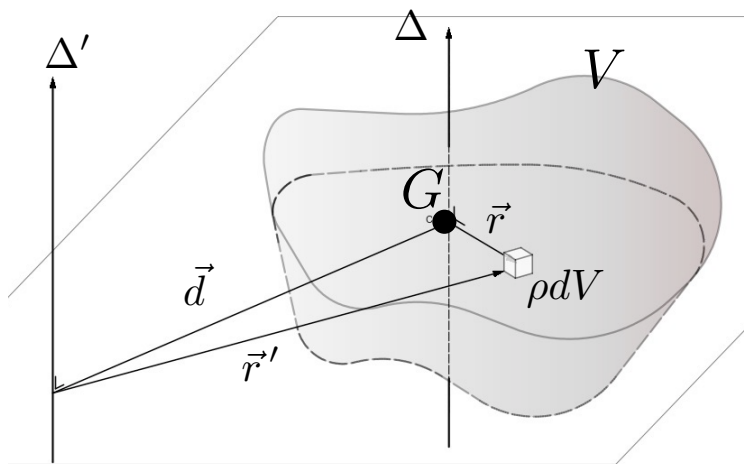
$$= \int_V (d^2 + 2\vec{r} \cdot \vec{d} + r^2) \rho dV$$

$$I_{\Delta'} = \underbrace{\int_V d^2 \rho dV}_{=Md^2} + 2\vec{d} \cdot \underbrace{\left( \int_V \vec{r} \rho dV \right)}_{=0} + \underbrace{\int_V r^2 \rho dV}_{=I_{\Delta}} = Md^2 + I_{\Delta}$$

$$I_{\Delta'} = Md^2 + I_{\Delta}$$

## Règle de Huygens-Steiner

Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse, additionné de la masse totale du solide multipliée par la distance entre les deux axes.



$$I_{\Delta'} = Md^2 + I_{\Delta}$$

# Analogies entre mouvement translationnel et mouvement de rotation

|                         | Translation                          | Rotation                                           |
|-------------------------|--------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Position                | $\vec{r}(x, y, z) = \vec{r}(t)$      | $\phi = \phi(t)$                                   |
| Vitesse                 | $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$      | $\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt} \hat{e}_{\Delta}$ |
| Accélération            | $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$      | $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$          |
| Energie cinétique       | $E^{\text{cin}} = \frac{1}{2} m v^2$ | $E^{\text{cin}} = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2$ |
| Opposition au mvt       | $m = \sum_i m_i$                     | $I_{\Delta} = \sum_i r_i^2 dm_i$                   |
| Cause de l'accélération | Force $\vec{F}$                      | Moment $M_{\Delta}$                                |

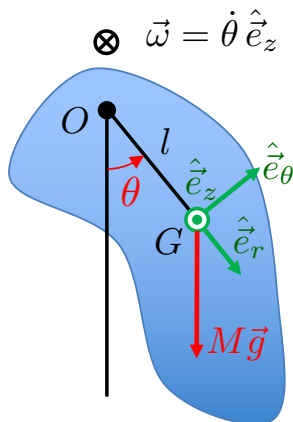
# Analogies entre mouvement translationnel et mouvement de rotation

|                       | Translation                                                               | Rotation                                                                                                |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Lois du mouvement     | $\vec{p} = m\vec{v}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{F} = m\vec{a}$ | $L_{\Delta} = I_{\Delta} \omega$ $M_{\Delta} = \frac{dL_{\Delta}}{dt}$ $M_{\Delta} = I_{\Delta} \gamma$ |
| Lois de conservations | $\vec{F}^{\text{ext}} = 0$ $\implies$ $\vec{p} = \text{cst}$              | $M_{\Delta}^{\text{ext}} = 0$ $\implies$ $L_{\Delta} = \text{cst}$                                      |

# Solide en rotation autour d'un axe fixe:

## Exemple: Pendule physique

On considère un pendule de masse  $m$  et de moment d'inertie  $I_G$  par rapport à un axe perpendiculaire à la feuille et passant par le centre de masse. Le système est en rotation autour d'un axe  $\Delta$  passant par  $O$ , lui aussi perpendiculaire à la feuille, et situé à une distance  $l$  de  $G$ .



$$L_{\Delta} = \vec{L}_O \cdot \hat{e}_z = I_{\Delta} \vec{\omega} \cdot \hat{e}_z = I_{\Delta} \omega$$

$$\vec{M}_O = l \hat{e}_r \times M \vec{g}$$

$$M_{\Delta} = \vec{M}_O \cdot \hat{e}_z = -Mgl \sin \theta$$

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = M_{\Delta} \quad I_{\Delta} \ddot{\theta} = -Mgl \sin \theta$$

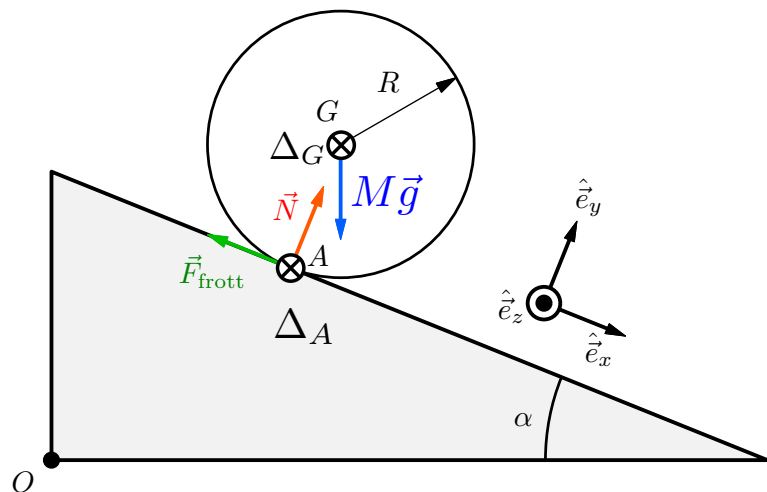
Petits des petits angles:  $\ddot{\theta} = -\frac{Mgl}{I_{\Delta}} \theta \quad \omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I_{\Delta}}}$

Huygens-Steiner:  $I_{\Delta} = I_G + Ml^2 > Ml^2$

La fréquence angulaire du pendule physique est inférieure à celle du pendule mathématique équivalent (toute la masse concentrée en 1 PM situé en G)

# Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe (mouvement plan-sur-plan)

■ Application: cylindre plein, roulant sans glisser sur un plan incliné:



■ On peut choisir un axe  $\Delta_G$  passant par le centre de masse....

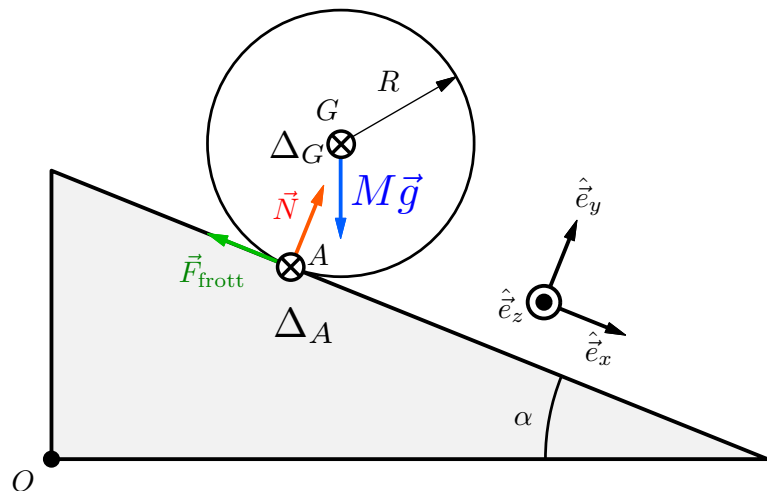
Moment d'inertie:  $I_{\Delta_G} = \frac{1}{2}MR^2$

Th. moment cinétique:  $I_{\Delta_G} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta_G}^{\text{ext}}$

Moment des forces externes:  $M_{\Delta_G}^{\text{ext}} = M_{\Delta_G}^{\vec{F}_{\text{frott}}} = R |\vec{F}_{\text{frott}}|$

# Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe (mouvement plan-sur-plan)

## ■ Application: cylindre plein, roulant sans glisser sur un plan incliné:



■ ... ou un axe  $\Delta_A$  passant par le point de contact entre le cylindre et le plan incliné.

Moment d'inertie:

$$I_{\Delta_A} = \underbrace{I_{\Delta_G} + MR^2}_{\text{Huyghens-Steiner}} = \frac{3}{2}MR^2$$

Th. moment cinétique:

$$I_{\Delta_A} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta_A}^{\text{ext}}$$

Moment des forces externes:

$$M_{\Delta_A}^{\text{ext}} = M_{\Delta_A}^{M\vec{g}} = M|\vec{g}|R \sin \theta$$



$$R \frac{d\omega}{dt} = \frac{dv_G}{dt} = \frac{2}{3}g \sin \theta$$

Energie cinétique : Koenig 2:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + E_{\text{cin}}^*$$

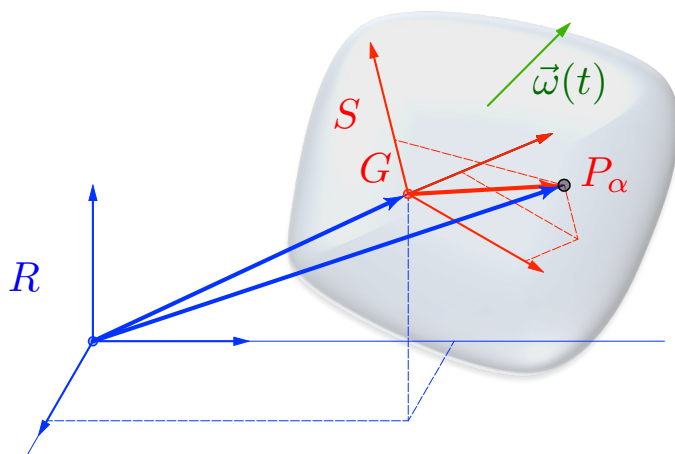


$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_{\Delta_G}\omega^2$$

“L’essentiel dans l’éducation, ce n’est pas la doctrine enseignée, c’est l’éveil.”

Ernest Renan / Souvenirs d’enfance

# **Dynamique du solide: Cas général. Tenseur d'inertie.**



- On se propose de calculer le moment cinétique et le moment d'inertie du solide S de vecteur de rotation instantanée  $\vec{\omega}(t)$  par rapport au centre de masse G.

On garde une description discrète par souci de légèreté.

- Le moment cinétique par rapport au centre de masse G est donné par:

$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} \{ \vec{GP}_{\alpha} \times m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{GP}_{\alpha}) \}$$

soit, en utilisant  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [ (\vec{GP}_{\alpha} \cdot \vec{GP}_{\alpha}) \vec{\omega} - (\vec{GP}_{\alpha} \cdot \vec{\omega}) \vec{GP}_{\alpha} ]$$

- La composante  $i$  du moment cinétique s'écrit:

$$L_{G,i} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\overrightarrow{GP_{\alpha}}|^2 \omega_i - \left( \sum_j GP_{\alpha,j} \omega_j \right) GP_{\alpha,i} \right]$$

- Comme on désire séparer les caractéristiques qui ne dépendent que du solide de celles qui dépendent de la dynamique, on réécrit le terme

$$|\overrightarrow{GP_{\alpha}}|^2 \omega_i = |\overrightarrow{GP_{\alpha}}|^2 \sum_j \delta_{ij} \omega_j$$

où on a introduit le symbole de Kronecker  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$$L_{G_i} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\overrightarrow{GP_{\alpha}}|^2 \sum_j \delta_{ij} \omega_j - \left( \sum_j GP_{\alpha,j} \omega_j \right) GP_{\alpha,i} \right]$$

- En intervertissant les sommations sur  $j$  et sur  $\alpha$  il vient:

$$L_{G_i} = \sum_j \sum_\alpha m_\alpha [|\vec{GP}_\alpha|^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,j} GP_{\alpha,i}] \omega_j = \sum_j I_{G_{ij}} \omega_j$$

où l'on définit le **tenseur d'inertie par rapport au centre de masse**:

$$I_{G_{ij}} = \sum_\alpha m_\alpha [|\vec{GP}_\alpha|^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,j} GP_{\alpha,i}]$$

**Tenseur d'inertie par rapport au centre de masse G**

- Ainsi, le moment cinétique est :

$$\vec{L}_G = I_G \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{G_{11}} & I_{G_{12}} & I_{G_{13}} \\ I_{G_{21}} & I_{G_{22}} & I_{G_{23}} \\ I_{G_{31}} & I_{G_{32}} & I_{G_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

- En écrivant

$$\overrightarrow{GP}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix}$$

le tenseur d'inertie s'écrit:

$$I_G = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{pmatrix}$$

**Tenseur d'inertie par rapport  
au centre de masse G**

- Sans démonstration: comme le tenseur d'inertie est réel et symétrique, il existe toujours un repère (= repère d'inertie) dans lequel il s'écrit sous forme de matrice diagonale.

$$I_G = \begin{pmatrix} I_{G_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G_{33}} \end{pmatrix}$$

- Si le solide présente des plans ou des axes de symétrie, ceux-ci sont perpendiculaires ou coïncident avec les axes principaux du repère d'inertie.

Exemples: Sphère, cylindre, disque, cône, cube, etc

- La vitesse d'un point quelconque  $P_\alpha$  d'un solide de centre de masse  $G$  est donnée par:

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_G + (\vec{\omega} \times \overrightarrow{GP}_\alpha)$$

- L'énergie cinétique totale est donc la somme des énergie cinétiques de tous les points matériels:

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left( \vec{v}_G + (\vec{\omega} \times \overrightarrow{GP}_\alpha) \right)^2 \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_G^2 + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_G \cdot (\vec{\omega} \times \overrightarrow{GP}_\alpha) + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \overrightarrow{GP}_\alpha)^2 \end{aligned}$$

- En utilisant l'identité vectorielle

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

il vient:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{v}_G \cdot \left( \vec{\omega} \times \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \overrightarrow{GP}_\alpha}_{=0} \right) + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left[ |\vec{\omega}|^2 |\overrightarrow{GP}_\alpha|^2 - (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{GP}_\alpha)^2 \right]$$

=0 J.-P. Hogge

- Les deux derniers termes peuvent être réécrits comme

$$|\vec{\omega}|^2 |\overrightarrow{GP}_\alpha|^2 = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) |\overrightarrow{GP}_\alpha|^2 = \sum_{i,j} |\overrightarrow{GP}_\alpha|^2 \omega_i \omega_j \delta_{ij}$$

$$(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{GP}_\alpha)^2 = \left( \sum_i \omega_i GP_{\alpha_i} \right)^2 = \sum_{i,j} GP_{\alpha_i} GP_{\alpha_j} \omega_i \omega_j$$

- Et on trouve donc pour l'énergie cinétique:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i \underbrace{\left[ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( |\overrightarrow{GP}_\alpha|^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha_i} GP_{\alpha_j} \right) \right]}_{I_{G_{ij}}} \omega_j$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \omega_i I_{G_{ij}} \omega_j = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_i \omega_i \underbrace{\left( \sum_j I_{G_{ij}} \omega_j \right)}_{=(I_G \vec{\omega})_i}$$

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (I_G \vec{\omega})$$

- Equations de la dynamique:

$$M\vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \quad + \text{théorèmes de transfert / Koenig}$$

- Equilibre statique: 
$$\begin{cases} \vec{F}^{\text{ext}} = 0 \\ \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0 \end{cases} \quad \forall O \in \text{référentiel}$$

- Le moment cinétique n'est en général pas parallèle au vecteur instantané de rotation

- Solide en rotation autour d'une axe fixe:

$$L_\Delta = I_\Delta \omega$$

$$L_{\Delta_G} = I_{\Delta_G} \omega$$

$$I_\Delta \frac{d\omega}{dt} = M_\Delta^{\text{ext}}$$

$$I_{\Delta_G} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta_G}^{\text{ext}}$$

$$E_{\text{cin,rot}} = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$$

$$E_{\text{cin}}^* = \frac{1}{2} I_{\Delta_G} \omega^2$$

- Analogies entre le mouvement de translation et le mouvement de rotation

### ■ Cas général

$$\vec{L}_G = I_G \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{G11} & I_{G12} & I_{G13} \\ I_{G21} & I_{G22} & I_{G23} \\ I_{G31} & I_{G32} & I_{G33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$I_{G_{ij}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [|\vec{GP}_{\alpha}|^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,j} GP_{\alpha,i}]$$

### ■ Repère d'inertie:

$$I_G = \begin{pmatrix} I_{G11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G33} \end{pmatrix}$$

### ■ Energie cinétique:

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (I_G \vec{\omega})$$